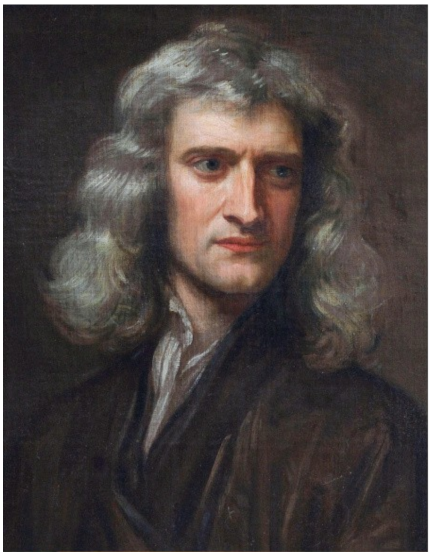
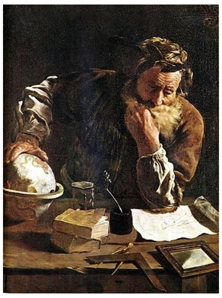
Une approche Historique et Mathématique Facile pour une vue d'ensemble du calcul différentiel et Intégral aussi appelé globalement calcul infinitésimal!

> https://www.youtube.com/@coolParadigmes (Intro. Calcul Infinitésimal)
> https://coolparadigmes.ch

Vous pouvez **comprendre en quelque minutes des concepts** de calcul infinitésimal **qui ont demandés des siècles d'efforts** avec une notation hyper pratique qui définit simplement les opérations effectuées et concepts à la manière d'un algorithme destiné à l'esprit humain.



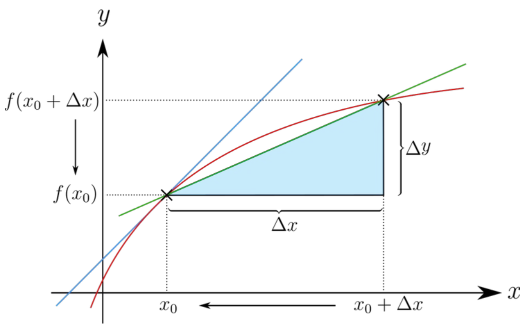
Isaac Newton (Angleterre) et Leibniz (Allemagne) ont découvert simultanément le calcul infinitésimal au 17ème siècle, mais **de sérieux efforts ont été fait auparavant dans plusieurs civilisations, et notamment chez les anciens grecs pour résoudre ce genre de problèmes**, sachant que sans le **papier moderne**, sans le **système décimal et la découverte du zéro**, sans **techniques algébriques** et avec des mythes et **paradoxes tenaces** par rapport à l'infini, **il aurait été surhumain** de découvrir et prouver **le 1er théorème fondamental du calcul infinitésimal**, puis de calculer un nombre conséquent de **primitives** *(des formules générales d'intégration permettant de calculer des surfaces sous des courbes)* avec leurs **dérivées** *(des formules générales donnant la pente d'une fonction en un point donné), et* donc **de découvrir le calcul infinitésimal dans ces conditions**.



Du côté des anciens grecs nous avons **Archimède qui au 3ème siècle av. J.-C.** est une des premières personnes connue à avoir abordé la notion de calcul de surfaces et de volumes en utilisant **la méthode d'exhaustion (4ème siècle av. J.-C.**, Eudoxe de Cnide) qui consiste notamment à calculer des approximations de surfaces en considérant la moyenne des surfaces des polygones inscrits et circonscrits, sachant que **plus les polygones ont de côtés plus la précision augmente**. A noter que le principe est tout aussi valable pour des volumes en considérant des polyèdres inscrits et circonscrits. Archimède à ceci de particulier qu'il s'est intéressé à de nombreux problème géométriques considérant des surfaces et des volumes dont il a pu trouver et démontrer les formules exactes pour certains d'entre eux, **dont la question de la surface sous une parabole**, ce qui est tout à fait remarquable sans connaissance formelle de l'algèbre! I**l a par contre fallu attendre Isaac Newton (1643-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)** pour pouvoir **calculer relativement facilement de nombreuses primitives** (les formules d'intégration) en se rendant enfin compte que **dérivations et intégration sont des opérations inverses l'une de l'autre** *à la constante d'intégration près* (symbolisée par «*C*») et sous des *conditions de continuité* caractérisant la majorité des problèmes mathématiques et physiques, qu'il s'agisse de calculs de surfaces sous des courbes ou de calculs de volumes sous des surfaces ou encore d'intégrations d'expressions mathématiques prenant en comptes plus de dimensions. Les longueurs, surfaces et volumes sont bien sûr souvent les exemples les plus faciles à visualiser, mais **intégration et dérivations peuvent aussi se faire sur d'autres grandeurs physiques** qui peuvent par contre souvent se schématiser graphiquement, par exemple avec un axe linéaire horizontal (abscisse) représentant le temps et un axe vertical représentant des variations de de vitesse.

Motivation : **entre la découverte de la méthode d'exhaustion 4ème siècle AC** et les techniques de calcul infinitésimal qui sont publiée à la fin du 17ème siècle, d'abord avec en 1687 «Principes mathématiques de la philosophie naturelle» d'Isaac Newton, qui en traitant de la physique gravitationnelle et de nombreux autres sujets utilise du calcul infinitésimal, mais sans sa notation moderne qui est créditée à Gottfried Wilhelm Leibniz qui a découvert **le calcul différentiel et intégral** indépendamment et pendant la même période où Newton y travaillait. Il s'en suit qu'entre les premiers calcul relativement précis de surface sous des courbes algébriques comme la parabole et le passage à la limite infinitésimale aboutissant à la découverte de nombreuses **dérivée** et **primitives** il s'est écoulé au moins 2000 ans, et comme vous pouvez assimiler la notation et les idées générales exposées ci-dessous en moins de 20 minutes, **vous comprenez en 20 minutes quelque chose que l'humanité a compris en 2000 ans**, donc **une minute / siècle**.

Définition de la dérivée dans un plan orthogonal x,y :



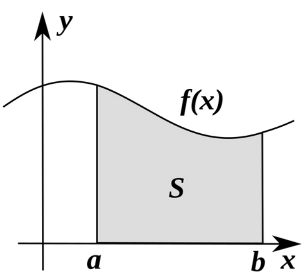
La dérivée d'une fonction continue y=f(x) pour un point donné de la courbe est par définition la pente et s'exprime par le (*1) quotient de *Δy/Δx* où *Δx* est choisi extrêmement petit pour que le segment de courbe correspondant puisse être assimilé à un segment droit et *Δy* est calculé avec la fonction, qui dans ce cas est *f(x)*. Pour une fonction où $y=f(x)$ la notation correspondant à la dérivée est

(*2) $y' = f'(x)$ ou (*3) $y' = \frac{d}{dx} f(x)$ ou

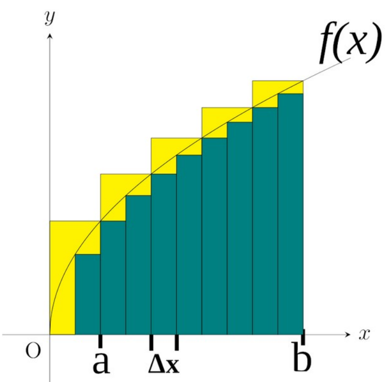
$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$ ou *Δy/Δx* ou *Δy/Δ* par la suite quand écrire l'index *X* de *Δ* rajoute trop de texte.

Remarque : la valeur de la dérivée en un point donné c'est aussi la pente qu'une droite prendrait une fois appuyée, donc tangente (*4) à la courbe sur le point considéré.

Définition de l'intégrale dans un plan :



Une intégrale peut être définie comme étant la **Surface** sous une fonction continue *f(x)* et l'axe des *X* comprise entre 2 valeurs «*a*» et «*b*» de *X*, il s'agit dans ce cas de **l'intégrale définie** (littéralement définie entre «*a*» et «*b*») et qui s'écrit : $\int_a^b f(x)dx$ et se «lit» Intégrale de *f(x)* entre «*a*» et «*b*», *notons que «dx»* représente la valeur infinitésimale sur l'axe des *X* de *Δx* qui multiplie la valeur de *f(x)* au point donné pour obtenir les surfaces successives des rectangles théoriques utilisés pour l'intégration (la Sommation) entre les bornes «*a*» et «*b*».



Dans la figure de gauche, cette fois pour une courbe ressemblant plus à une parabole. on voit clairement que plus les rectangles utilisés pour faire une approximation de la surface sous la courbe sont nombreux et mince (Δx *petit*) plus cette approximation est bonne! D'où l'intérêt de passer à la limite où Δx est tellement petit qu'il n'y a plus aucune différence entre la surface calculée sous la courbe et la surface exacte. A noter qu'énormément de fonctions sont intégrables littéralement (c'est à dire sans se contenter d'une approximation numérique), et on arrive donc à obtenir des expressions alphanumériques exactes, ce qui simplifie et augmente la vitesse et la précision des calculs pratiques.

Deux théorèmes fondamentaux du calcul différentiel et intégral :

(2) **Deuxième Théorème Fondamental du calcul infinitésimal (2èmeTF) présenté ici en premier contrairement à quasiment toutes les autres publications** parce qu'**il est beaucoup plus simple à comprendre!** Notons qu'il a été **découvert bien avant l'autre**, et son étiquette numérique de «secondo» doit être interprétée comme venant du fait de sa moindre importance pratique!

Définition : Il énonce simplement que **si l'on connaît tous les changements infinitésimaux d'une certaine quantité, alors on peut calculer le changement général de cette quantité en additionnant tous les changements infinitésimaux**, phénomène qui apparaît très clairement sur la figure ci-dessus avec les rectangles, plus ils sont nombreux et donc leurs bases petites plus l'approximation de la surface sous la courbe est bonne.

Formellement cela s'exprime de manière classique sur un intervalle de l'axe des «*x*» allant de «*a*» à «*b*» et dont il faut bien sûr soustraire la partie allant *jusqu'*à «*a*» de la partie allant *jusqu'*à «*b*» ce qui s'écrit : $\int_a^b f(x)\,dx$ qui est **l'intégrale définie** de «a» à «b» pour la fonction *f(x)*. Quand les fonctions d'intégration appelées **primitives** [symbolisées par des lettres semblables mais majuscules comme ici ***F(x)***] sont connues, le calcul du résultat s'obtient par $F(b)-F(a)$ autrement dit $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

Remarque: on parle aussi logiquement d'**intégrale indéfinie** quand les bornes d'intégration, ici de «a» à «b» ne sont pas définies, et **on ajoute alors une constante inconnue «*C*»** à l'expression pour marquer cette indétermination $\int f(x)\,dx + C$ notons que «*C*» est une constante qui s'élimine automatiquement lorsque l'on soustrait la valeur obtenue sur la borne inférieure à la valeur obtenue sur la borne supérieure.

Que se passe t'il **quand ont utilise la primitive** (formule d'intégration) **avec une seule valeur**, conventionnellement la borne supérieure! Et bien comme on ne lui soustrait rien, cela correspond à soustraire zéro = 0, ce qui fait que c'est **comme si on intégrait de manière définie depuis la première valeur de la variable indépendante «*x*» inférieure dont la valeur de la primitive est nulle**, et cela correspond **en général à la valeur 0 de la variable indépendante** (vu qu'on ajoute une constante conventionnelle «C» à l'intégrale indéfinie on a pas de raison de rajouter encore une constante numérique), sauf pour certaines primitives, par exemple celle qui passent par un infini absolut à la valeur zéro, comme 1/x.

(1) Premier théorème fondamental du calcul infinitésimal (1erTF) énonce que pour des courbes/fonctions (*5) **intégration et différenciation sont des opérations inverses l'une de l'autre!** Tant que **(#1)** nous ne **gérons pas des courbes avec une ou plusieurs ruptures incluses dans la zone considérée** ou des **angles vifs** (le point concerné n'a pas de tangente) et que **(#2)** nous tenons compte que si nous connaissons une dérivée f'(x) et la primitive d'intégration correspondante, retrouver *f(x)* uniquement à partir de *f'(x)* implique que **la courbe aura une hauteur indéterminée**, et nous retrouvons ici la notion de constante d'intégration qui ne change pas la pente de la fonction quelque soit la valeur de «*x*», mais change évidemment la valeur de la surface sous la courbe (valeur de l'intégration) **en faisant plus ou moins monter la courbe**. Une constante d'intégration qui évidemment s'annule en cas d'intégrale définie (les deux constantes identiques s'annulent mutuellement en se soustrayant l'une à l'autre). A noter que la constante inconnue C_1 due à la recherche par intégration de la fonction d'origine à partir de la dérivée n'a pas la même origine que la constante C_2 de l'intégrale indéfinie qui souligne le fait que si l'on ne spécifie pas les bornes d'intégration sur la variable dépendante le résultat n'est pas déterminé. Ce qu'il faut en retenir c'est que **le processus d'intégration doit être contextualisé suivant les cas et la constante d'intégration simplement notée habituellement «C» nous le rappel**.

Moins évident que l'autre théorème fondamental, il est nécessaire de se pencher attentivement sur ses caractéristiques pour bien le comprendre :

(a) Pourquoi porte-il le numéro **(1)** ? Alors que l'autre beaucoup plus facile à comprendre dispose d'un ancêtre historique antédiluvien sans passage à la limite infinitésimale qui consiste par exemple à obtenir des approximations de surfaces compliquées à l'aide de surfaces standards faciles à calculer? Comme ce n'est pas une numérotation chronologique, **le numéro (1) met en évidence l'importance que ce théorème a eu pour le développement du calcul infinitésimal**, permettant à de nombreux problèmes mathématiques de sortir des approches approximatives pour utiliser des formules d'intégrations exactes démontrées, appelées **primitives** et rapidement publiées dans de nombreux traités et tables de mathématiques.

Démonstration du **1erTF** au prochain chapitre / prochaine vidéo !

Quelques mots de plus sur les primitives :

#1 : L'éthymologie du terme tient principalement à **la première place qu'elles occupent dans la hiérarchie d'importance** concernant le calcul infinitésimal et **non pas à un quelconque ordre** (pédagogiquement) opérationnel ou **historique** ce qui est une équivalence étymologique avec le premier théorème fondamental du calcul infinitésimal.

#2 : Un petit saut en avant, la primitive de x^n est égale à $(x^{n+1})/(n+1)$ une démonstration générale est prévue! Question notation, cet exemple particulier est utilisé pour mettre en évidence la **notation entre crochet pour spécifier le calcul des primitives**, et de manière générale:

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

, et plus spécifiquement pour x^n on a :

$$\int_a^b x^n\,dx=\left[\frac{(x^{(n+1)})}{(n+1)}\right]_a^b=\frac{(b^{(n+1)})}{(n+1)}-\frac{(a^{(n+1)})}{(n+1)}$$

Quelques conseils, spécialement pour des cours plus avancés de mathématique :

- Il faut toujours considérer que le document/polycopié/livre utilisé peut avoir des erreurs et donc faire des vérifications croisées.
- Quand c'est possible, c'est à dire assez de temps à disposition, il vaut la peine d'essayer de tout démontrer ou au moins comprendre les démonstrations tout en comprenant les définitions à 100%.
- On peut rarement se contenter d'une seule source.

Compléments :

(*1) Pourquoi un quotient pour désigner la pente et non pas un angle? Parce que dans le cas de traçage et calculs de courbes Δx et Δy apparaissent directement tandis qu'un angle devrait être calculé en plus.

(*2) Quoi de mieux qu'un apostrophe à 45 degrés pour symboliser la pente!

(*3) $\frac{d}{dx}f(x)$ littéralement dérivée de *f(x)* sur un intervalle infinitésimal delta x.

(*4) Pour une droite **touchant une courbe** par définition avec la pente $\Delta y/\Delta x$, donc **tangente à cette courbe**, il suffit bien sûr d'utiliser la fonction ***arc tg(Δy/Δx)*** pour la valeur de l'angle. Note trigonométrique : pour un cercle de rayon unitaire centré sur le point de **tangence**, la longueur de l'**arc** intersecté par la tangente et une droite horizontale passant par le centre du cercle correspond à l'angle ***arc tg(Δy/Δx)*** en radians.

(*5) Pour des courbes (fonctions) continues, c'est à dire sans singularités comme une rupture de la courbe elle-même (exemple: 1/x avec un passage entre -infini et +infini pour x=0) impossible d'intégrer et de différentier sur la rupture! Ou quand un angle vif apparaît sur la «courbe»/fonction comme par exemple à la jonction de deux segments de droites, l'intégration englobant l'angle reste possible, mais pas la dérivation (impossible de déterminer la pente de la tangente sur l'angle).

Références :

- **Calcul Infinitésimal (différentiel et intégral)** : https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_infinit%C3%A9simal
- **Les Primitives** (**formules d'intégration**) : https://fr.wikipedia.org/wiki/Primitive
- **Les Dérivées** (**formules de dérivation** … différentielles d'ordre 1): https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9riv%C3%A9e, https://fr.wikipedia.org/wiki/Diff%C3%A9rentielle
- **Passage à la limite pour la dérivation** : https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_du_calcul_infinit%C3%A9simal#Pierre_de_Fermat,_1636
    - Remarquons que pour la dérivation le passage à la limite se fait en considérant que Δx tend vers 0 et pour l'intégration on peut généralement trouver la primitive correspondant à une dérivée en appliquant le premier théorème fondamental du calcul infinitésimal, donc en cherchant quelle opération d'intégration annule l'opération de dérivation considérée ! On peut aussi passer à la limite directement avec l'intégration, aussi en faisant tendre Δx (la base des rectangles d'intégration) vers 0 , mais c'est généralement beaucoup plus difficile, car il ne s'agit pas d'effectuer un simple quotient $\Delta y/\Delta x$ en un point arbitraire d'une courbe mais de trouver la somme d'une infinité de rectangles.
- **Théorème fondamental de l'analyse** : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_fondamental_de_l%27analyse
    - https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_calculus
- **Isaac Newton** (1643-1727) : https://fr.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
- **Œuvre maîtresse d'Isaac Newton** : Philosophiæ naturalis principia mathematica (latin pour « Principes mathématiques de la philosophie naturelle »), https://fr.wikipedia.org/wiki/Philosophi%C3%A6_naturalis_principia_mathematica
- **Gottfried Wilhelm Leibnitz** (1646-1716) : https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz
- **Archimède de Syracuse** : https://fr.wikipedia.org/wiki/Archim%C3%A8de
- **Découverte du zéro** : https://www.slate.fr/story/152201/longue-histoire-zero-important

- Leonardo Fibonacci ou « Léonard de Pise » (vers 1170 à Pise - vers 1250) : https://fr.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci
- Il apporte vers 1200 la notation des chiffres indo-arabes aux mathématiques de l'Occident, apport décisif du zéro : https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_de_num%C3%A9ration_indo-arabe
- Et en 1202 il publie Liber abbaci, que l'on peut traduire en Livre du calcul : https://fr.wikipedia.org/wiki/Liber_abaci
- Et ne pas manquer la célèbre suite de de Fibonacci : https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci

- **Méthode d'exhaustion** : https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_d%27exhaustion
- **L'histoire du papier, des origines à aujourd'hui** : https://www.pixartprinting.fr/blog/histoire-du-papier

Référence pour les images dans l'ordre de lecture :

- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Differencial_quotient_of_a_function.svg
- https://en.wikipedia.org/wiki/File:Integral_as_region_under_curve.svg
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Integral_approximations_J.svg